

基礎 1 4 比例式

条件式として、 $\text{分数} = \text{分数} = \text{分数} = \dots$ と分数が並んでいるとき、この式を**比例式**といいます。

この比例式が出てきたときは、まず

$$\text{分数} = \text{分数} = \text{分数} = \dots = k \text{ とおく}$$

とつなげるところからスタートしてください。

そして、うまく k の値を利用することにより問題を解くことができます。

例 1

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} \text{ のとき、次の問いに答えよ。}$$

(ただし $xyz \neq 0$ である。)

(1) $x : y : z$ の比を求めよ。

(2) $\frac{x^2}{y^2+z^2}$ の値を求めよ。

(3) $2x + y + z = 30$ のとき、 x, y, z の値を求めよ。

まずは、 $\text{分数} = \text{分数} = \text{分数}$ の形が出てきたので、 k とおくところからスタートします。

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = k \text{ とおく}$$

次に一番前と一番後ろの式を組み合わせ分母をはらいます。

$$\begin{array}{l} \frac{x}{3} = k \\ \times 3 \quad \downarrow \\ x = 3k \end{array}$$

同様に二番目と後ろ、三番目と後ろを組み合わせる分母をはらいます。

$$\begin{array}{cc} \frac{y}{4} = k & \frac{z}{5} = k \\ \times 4 \quad \downarrow & \times 5 \quad \downarrow \\ y = 4k & z = 5k \end{array}$$

以上より
$$\begin{cases} x = 3k \\ y = 4k \\ z = 5k \end{cases}$$

とおけます。これを利用して問題に入ります。

(1) $x : y : z = 3k : 4k : 5k$

kで約分！

$$= \underline{3 : 4 : 5}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{x^2}{y^2+z^2} &= \frac{(3k)^2}{(4k)^2+(5k)^2} \\ &= \frac{9k^2}{16k^2+25k^2} \\ &= \frac{9k^2}{41k^2} = \underline{\frac{9}{41}} \end{aligned}$$

(3) $2x + y + z = 30$ より

$$2 \times 3k + 4k + 5k = 30$$

$$6k + 4k + 5k = 30$$

$$15k = 30$$

$$k = 2$$

$$\therefore \begin{cases} x = 3 \times 2 = 6 \\ y = 4 \times 2 = 8 \\ z = 5 \times 2 = 10 \end{cases}$$

解けそうですか？出だしだけしっかり頭に入れておけば難しくないですよ！

次は少しだけ応用問題です。

例 2

$$\frac{x+y}{3} = \frac{y+z}{4} = \frac{z+x}{5} \quad (xyz \neq 0) \text{ を満たすとき}$$

$$\frac{x^2 - y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2} \text{ の値を求めよ。}$$

今回も比例式なので「 $=k$ とおく」ところからスタートします。

$$\frac{x+y}{3} = \frac{y+z}{4} = \frac{z+x}{5} = k \text{ とおく}$$

分母をはらって、

$$\begin{cases} x+y = 3k & \cdots \textcircled{1} \\ y+z = 4k & \cdots \textcircled{2} \\ z+x = 5k & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

今回は足し算の形が出てきてしまって、例1よりも少し面倒ですが、ここからの進み方をしっかり覚えておきましょう！

①+②+③を行います。

$$\begin{array}{rcl} x+y & = & 3k \\ y+z & = & 4k \\ +) \quad z+x & = & 5k \\ \hline 2x + 2y + 2z & = & 12k \end{array}$$

2で約分！

$$x + y + z = 6k \quad \cdots \textcircled{4}$$

次に考えてほしいのは

$$\textcircled{1} \text{ と } \textcircled{4} \text{ より } 3k + z = 6k \rightarrow z = 3k$$

$$\textcircled{2} \text{と} \textcircled{4} \text{より} \quad x + 4k = 6k \rightarrow x = 2k$$

$$\textcircled{3} \text{と} \textcircled{4} \text{より} \quad 5k + y = 6k \rightarrow y = k$$

$$\text{となり} \quad \begin{cases} x = 2k \\ y = k \\ z = 3k \end{cases}$$

ここまで解けたら例 1 と同様に解いていきましょう！

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2} &= \frac{(2k)^2 - k^2 - (3k)^2}{(2k)^2 + k^2 + (3k)^2} \\ &= \frac{4k^2 - k^2 - 9k^2}{4k^2 + k^2 + 9k^2} = \frac{-6k^2}{14k^2} \\ &= -\frac{3}{7} \end{aligned}$$

少し難しいですが、しっかり解き方を覚えてくださいね！

【練習問題】

$$\frac{x+y}{6} = \frac{y+z}{8} = \frac{z+x}{12} \quad (xyz \neq 0) \text{ のとき、}$$

$$\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz} \text{ の値を求めよ。}$$