基礎14 比例式

条件式として、分数 = 分数 = 分数 = \cdots と分数が並んでいるとき、この式を比例式といいます。

この比例式が出てきたときは、まず

分数 = 分数 = 分数 = ··· = kとおく

とつなげるところからスタートしてください。 そして、うまくkの値を利用することにより問題を解くことができます。

例1

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$$
 のとき、次の問いに答えよ。
(ただし $xyz \neq 0$ である。)

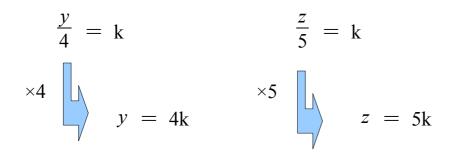
- (1) x : y : z の比を求めよ。
- $(2) \quad \frac{x^2}{y^2+z^2} \quad の値を求めよ。$
- (3) 2 x + y + z = 30 のとき、 x , y , z の値を求めよ。

まずは、分数=分数=分数の形が出てきたので、kとおくところからスタートします。

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = k$$
 とおく

次に一番前と一番後ろの式を組み合わせて分母をはらいます。

同様に二番目と後ろ、三番目と後ろを組み合わせて分母をはらいます。



以上より
$$\begin{cases} x = 3k \\ y = 4k \\ z = 5k \end{cases}$$

とおけます。これを利用して問題に入ります。

(1) x : y : z = 3k : 4k : 5k

k で約分!

$$= 3:4:5$$

(2)
$$\frac{x^2}{y^2 + z^2} = \frac{(3k)^2}{(4k)^2 + (5k)^2}$$
$$= \frac{9k^2}{16k^2 + 25k^2}$$
$$= \frac{9k^2}{41k^2} = \frac{9}{41}$$

$$2 \times 3k + 4k + 5k = 30$$

$$6k + 4k + 5k = 30$$

$$15k = 30$$

$$k = 2$$

$$\therefore \begin{cases} x = 3 \times 2 = 6 \\ y = 4 \times 2 = 8 \\ z = 5 \times 2 = 10 \end{cases}$$

解けそうですか?出だしだけしっかり頭に入れておけば難しくないですよね!

次は少しだけ応用問題です。

例 2

$$\frac{x+y}{3} = \frac{y+z}{4} = \frac{z+x}{5}$$
 ($xyz \neq 0$) を満たすとき $\frac{x^2 - y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ の値を求めよ。

今回も比例式なので「=kとおく」ところからスタートします。

$$\frac{x+y}{3} = \frac{y+z}{4} = \frac{z+x}{5} = k$$
 とおく

分母をはらって、

$$\begin{cases} x+y = 3k & \cdots \\ y+z = 4k & \cdots \\ z+x = 5k & \cdots \\ \end{cases}$$

今回は足し算の形が出てきてしまって、例1よりも少し面倒ですが、 ここからの進み方をしっかり覚えておきましょう!

①+②+③を行います。

$$x+y = 3k$$

$$y+z = 4k$$

$$+) z+x = 5k$$

$$2 x +2 y +2 z = 12k$$

$$x + y + z = 6k$$

$$\cdots ④$$

次に考えてほしいのは

①
$$\geq$$
 ④ \downarrow り $3k+z=6k \rightarrow z=3k$

②と④より
$$x + 4k = 6k \rightarrow x = 2k$$

③と④より
$$5k+y=6k \rightarrow y=k$$

$$\begin{cases} x = 2k \\ y = k \\ z = 3k \end{cases}$$

ここまで解けたら例1と同様に解いていきましょう!

$$\frac{x^2 - y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{(2k)^2 - k^2 - (3k)^2}{(2k)^2 + k^2 + (3k)^2}$$

$$= \frac{4k^2 - k^2 - 9k^2}{4k^2 + k^2 + 9k^2} = \frac{-6k^2}{14k^2}$$

$$= -\frac{3}{7}$$

少し難しいですが、しつかり解き方を覚えてくださいね!

【練習問題】

$$\frac{x+y}{6} = \frac{y+z}{8} = \frac{z+x}{12} \quad (xyz \neq 0) \quad \emptyset \geq \varepsilon,$$

$$\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{x v z}$$
 の値を求めよ。